

# Verhulst und die logistische Gleichung in der Populationsdynamik

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement  
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France  
nicolas.bacaer@ird.fr

1838 veröffentlichte der belgische Mathematiker Pierre-François Verhulst einen Artikel, in dem er (mit verschiedenen Notationen) die logistische Gleichung einführte, die heute für das Bevölkerungswachstum bekannt ist

$$\frac{dP}{dt} = r P \frac{K - P}{K} \quad (1)$$

[1]. Er passte die Parameter dieser Gleichung an Bevölkerungsdaten aus mehreren Ländern an, einschließlich Belgien. Der Artikel sagt nicht, welche Werte von  $r$  und  $K$  erhalten wurden. Aus der vorgelegten Tabelle geht jedoch hervor, dass Verhulst seine Berechnungen für Belgien auf die folgenden Hypothesen stützte, die aus realen Daten gewonnen wurden:

$$P(1815) = 3\,494\,985, \quad P(1824) = 3\,816\,249, \quad P(1833) = 4\,142\,257.$$

Mit diesen drei Punkten (beachten Sie, dass das Modell drei Parameter hat:  $r$ ,  $K$  und eine Integrationskonstante) finden wir leicht  $K = 8,43$  Millionen für die Asymptote der Bevölkerung. In der Tat, wenn  $P_0$ ,  $P_1$  und  $P_2$  sind die Populationen in  $t_0$ ,  $t_1 = t_0 + T$  und  $t_2 = t_0 + 2T$  dann

$$K = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2 P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2}.$$

1845 veröffentlichte Verhulst einen weiteren Artikel zum gleichen Thema. Er führte den Begriff "Logistik" ein und erklärte detaillierter, wie die Parameter geschätzt werden. Diesmal verwendete er nach genauerer Betrachtung der Daten etwas andere Annahmen:

$$P(1815) = 3\,627\,253, \quad P(1830) = 4\,247\,113, \quad P(1845) = 4\,800\,861. \quad (2)$$

Er erhielt  $K = 6,58$  Millionen [2], ein Ergebnis, das weit unter der vorherigen Schätzung lag. Verhulst kehrte im folgenden Jahr in einer kurzen Notiz [3] und schließlich in einem längeren Artikel, der 1847 veröffentlicht wurde, zu diesem Thema zurück. In diesen beiden Dokumenten schlug er vor, dass es einen Fehler in der "Ableitung" der Gleichung gab Logistik. Stattdessen verwendete er (wieder mit unterschiedlichen Notationen) ein Modell der Form

$$\frac{dP}{dt} = r P \frac{K - P}{P} = r(K - P) \quad (3)$$

[4]. Mit den gleichen Daten (2) erhielt er  $K = 9,44$  Millionen, ein Ergebnis, das sich immer noch stark von den beiden vorherigen Ergebnissen unterscheidet. Für dieses zweite Modell

$$K = \frac{P_1^2 - P_0 P_2}{2 P_1 - P_0 - P_2}.$$

Die logistische Gleichung (1) wurde einige Jahrzehnte später von verschiedenen Personen wieder eingeführt, ohne die Arbeit von Verhulst zu kennen [5]. Es wurde für das individuelle Wachstum von Tieren, Pflanzen, Menschen und Körperorganen [6], für das Wachstum von Populationen von Mikroorganismen [7] oder als Verhulst für das Wachstum von menschlichen Populationen wie der Population verwendet aus den Vereinigten Staaten [8]. Verhulsts Arbeit wurde schließlich bemerkt [9, p. 249] und der Begriff "Logistik" wurde allgemein verwendet. Die Debatten über die Bedeutung der Logistikequation dauerten viele Jahre. Für eine ausführliche Diskussion siehe [10, S. 64-97]. Die Schlussfolgerung war wahrscheinlich, dass es kein Grundgesetz war. Wir können diese Gleichung für kurzfristige Projektionen verwenden, aber nicht für langfristige Projektionen. Dennoch, so fasst ein berühmtes biographisches Wörterbuch Verhulsts Arbeit über die Bevölkerung zusammen [11]:

„Verhulst hat 1846 gezeigt, dass die Hindernisse proportional zum Verhältnis des Bevölkerungsüberschusses zur Gesamtbevölkerung zunehmen. Er wurde daher veranlasst, die Zahl 9.400.000 als Obergrenze für die belgische Bevölkerung anzugeben (die 1967 übrigens 9.581.000 betrug). Verhulsts Forschungen zum Gesetz des Bevölkerungswachstums machen es zu einem Vorläufer für moderne Fachleute auf diesem Gebiet. ""

Beachten Sie, dass sich dieser Absatz auf das Modell (3) und nicht auf das Modell (1) bezieht, auch wenn wir uns heutzutage nur wegen des Modells (1) an Verhulst erinnern. Angesichts der Variabilität der Verhulst-Ergebnisse für die maximale Bevölkerung  $K$  erscheint es außerdem nicht sinnvoll, ein einzelnes Ergebnis mit der aktuellen belgischen Bevölkerung zu vergleichen. Das vorige Zitat war auch eine Quelle der Verwirrung für spätere Verweise auf Verhulst. Seit 1996 zitiert beispielsweise eine der beliebtesten Websites zur Geschichte der Mathematik [12] [11] und erzählt die Geschichte auf leicht modifizierte (und aktualisierte) Weise:

"Die nichtlineare Differentialgleichung, die das Wachstum einer biologischen Population beschreibt, die er abgeleitet und untersucht hat, trägt jetzt seinen Namen. Mit seiner Theorie prognostizierte Verhulst, dass die Obergrenze der belgischen Bevölkerung 9.400.000 betragen würde. Die Bevölkerung im Jahr 1994 betrug 10.118.000. Diese Vorhersage scheint angesichts der Auswirkungen der Einwanderung ziemlich gut zu sein. ""

Lassen Sie uns in diesem Zitat bemerken, dass "seine Theorie" sich auf die logistische Gleichung bezieht, dass Verhulst selbst am Ende denkt, dass es nicht korrekt war. Darüber hinaus wird das numerische Ergebnis von Modell (3) dem Modell (1) zugeordnet, das den Eindruck einer

Rehabilitation der logistischen Gleichung für langfristige Bevölkerungsprojektionen erweckt. In einem kürzlich erschienenen Buch [13, S. 5] gibt es eine enge Variante mit einem neuen Update:

„Mit seiner Theorie prognostiziert Verhulst, dass die Grenzkapazität der belgischen Bevölkerung 9,4 Millionen betragen wird. Die Gesamtbevölkerung in Belgien betrug im Januar 2000 10,24 Millionen Einwohner, eine Differenz von nur 0,84 Millionen, hauptsächlich aufgrund der Einwanderung.“

Das Buch [14, S. 10] erzählt eine ähnliche Geschichte. Wie Ronald Fisher über die Arbeit von Mendel schrieb [15, p. 6]:

„Die Wissenschaftsgeschichte hat stark unter der Verwendung von gebrauchten Materialien durch Lehrer und der daraus resultierenden Vergessenheit der Umstände und der intellektuellen Atmosphäre gelitten, in der die großen Entdeckungen der Vergangenheit gemacht wurden. Ein Studium aus erster Hand ist immer lehrreich und oft... voller Überraschungen.“

Dank des Web werden Studien aus erster Hand jetzt erheblich vereinfacht. Die Bibliothek der Universität Göttingen in Deutschland hat die Zeitungen mit Verhulsts Artikeln aus den Jahren 1845 und 1847 digitalisiert: Sie können von der Website der Bibliothek heruntergeladen werden. Für den Artikel von 1838 gibt es eine englische Übersetzung in [16]. Abschließend hier eine kurze Biographie von Verhulst [17, 18]. Für neuere Diskussionen siehe zum Beispiel [19, 20, 21, 22]:

- 1804: Geburt in Brüssel.
- 1822-1825: Studium an der Universität Gent, Diplomarbeit in Mathematik.
- 1829: Veröffentlichung seiner Übersetzung von John Herschels Buch "Vertrag des Lichts".
- 1830: Nach der Revolution, die zur Unabhängigkeit Belgiens führt, interessiert sich für Politik, Geschichte und "politische Arithmetik".
- 1834: Beginn des Mathematikunterrichts an l'École Royale Militaire.
- 1835: sein ehemaliger Professor Quetelet veröffentlicht "Essai de physique sociale"[23]. Dies ist der Ausgangspunkt für Verhulsts Studien zum Bevölkerungswachstum.
- 1835-1840: Professor an der Freien Universität Brüssel.
- 1841: Veröffentlichung seiner mathematischen Abhandlung über elliptische Funktionen. Wahl zur Königlichen Akademie von Belgien.
- 1848: Präsident der Akademie.
- 1849: Tod in Brüssel (wahrscheinlich an Tuberkulose).

## Referenzen

1. Verhulst, P. –F. , 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. –F. , 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 – 45. [http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no\\_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222](http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222)
3. Verhulst, P. –F. , 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 – 227.
4. Verhulst, P. –F. , 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. XX, 1 – 32. [http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no\\_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013](http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013)
5. Lloyd, P. J. , 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.
6. Robertson, T. B. , 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G. , Kesava Pai, M. , 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R. , Reed, L. J. , 1920. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R. , 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E. , 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J. , 1976. Verhulst (Pierre – François). In : Gillispie, C. C. (Ed. ), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J. , Robertson, E. F. , 1996. Pierre François Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Verhulst.html>
13. Iannelli, M. , Martcheva, M. , Milner, F. A. , 2005. Gender – structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J. , 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H. , 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P. , Keyfitz, N. , 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A. , 1850. Pierre – François Verhulst. Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97 – 124. Traduction en anglais dans : Miner, J. R. , 1933. Pierre – François Verhulst, the discoverer of the logistic curve. Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A. , 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle. C. Mucquardt, Bruxelles. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b>
19. Mawhin, J. , 2002. Les héritiers de Pierre – François Verhulst : une population dynamique. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B. , 2004. Pierre – François Verhulst et la loi logistique de la population. Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. <http://www.chess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf>
21. Ausloos, M. , Dirickx, M. (ed. ), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N. , 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.

23. Quetelet, A., 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris.  
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d>

@article{Schmidt1968DieQV, title={Die quantitative Verteilung und Populationsdynamik des Mesopsammons am Gezeiten-Sandstrand der Nordseeinsel Sylt I. Faktorenfolge und biologische Gliederung des Lebensraumes}, author={P. Schmidt}, journal={International Review of Hydrobiology}, year={1968}, volume={53}, pages={723-779} }. Feigenbaum-Diagramm â€” Die logistische Gleichung wurde ursprÃ¼nglich 1837 von Pierre FranÃ§ois Verhulst als demografisches Modell eingefÃ¼hrt. Die Gleichung ist ein Beispiel dafÃ¼r, wie komplexes, chaotisches Verhalten aus einfachen nichtlinearen Gleichungen entstehen kann â€¦ Deutsch Wikipedia. Feigenbaum-Konstante â€” Die beiden Feigenbaum Konstanten  $\hat{\rho}$  und  $\hat{\mu}$  sind mathematische Konstanten, die in der Chaosforschung eine wichtige Rolle spielen. Inhaltsverzeichnis 1 Erforschung 2 Einzelnachweise 3 Literatur 4 We â€¦ Deutsch Wikipedia. Logistische Gleichung â€” Die logistische Gleichung wurde ursprÃ¼nglich 1837 von Pierre FranÃ§ois Verhulst als demografisches mathematisches Modell eingefÃ¼hrt. Die Gleichung ist ein Beispiel dafÃ¼r, wie komplexes, chaotisches Verhalten aus einfachen nichtlinearen Gleichungen â€¦ Deutsch Wikipedia. Logistic map â€” The logistic map is a polynomial mapping of degree 2, often cited as an archetypal example of how complex, chaotic behaviour can arise from very simple non linear dynamical equations.